a) $xy \cdot y' = \cancel{1} - x^2$.

Преобразуем уравнение:

$xy \cdot y' = 1 - x^2$ $|: x$

$y \cdot y' = \frac{1-x^2}{x}$.

Т.к. $y' = \frac{dy}{dx}$, то получим:

$y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2}{x}$ или $ydy = \frac{1-x^2}{x} \cdot dx$.

Получили диф. уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируем обе части:

$\int y dy = \frac{y^2}{2} + C_1$;

$\int \frac{1-x^2}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x} - x\right) dx = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C_2$.

Получаем:

$\frac{y^2}{2} + C_1 = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C_2$, $|\cdot 2$

$y^2 + 2C_1 = 2\ln|x| - x^2 + 2C_2$;

$y^2 + x^2 - \ln x^2 = 2C_2 - 2C_1$,

$y^2 + x^2 - \ln x^2 = C$ – общий интеграл уравнения б) $xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$

Решение:

Преобразуем уравнение:

$$xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x} \quad / : x$$

$$y' - \frac{y}{x} = \left(1+\frac{y}{x}\right)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right).$$

Получили однородное уравнение.

Пусть $\frac{y}{x} = t$, тогда $y = tx$ и $y' = t'\cdot x + t\cdot x' =$
$= t'x + t$. Получаем:

$$t'\cdot x + t - t = (1+t)\ln(1+t);$$

$$t'\cdot x = (1+t)\ln(1+t).$$

Так как $t' = \frac{dt}{dx}$, то получим.

$$\frac{dt}{dx}\cdot x = (1+t)\ln(1+t),$$

$$\frac{dt}{(1+t)\ln(1+t)} = \frac{dx}{x}.$$ Интегрируем полученное уравнение:

$$\int\frac{dt}{(1+t)\ln(1+t)} = \left|\begin{matrix} z = \ln(1+t), \\ dz = \frac{dt}{1+t}\end{matrix}\right| = \int\frac{dz}{z} = \ln|z| + C_1 =$$

$$= \ln|\ln(1+t)| + C_1;$$

$\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + C_2$, значит

$$\ln|\ln(1+t)| + C_1 = \ln|x| + C_2,$$

$$\ln|\ln(1+t)| - \ln|x| = C_2 - C_1,$$

$$\ln\left|\frac{\ln(1+t)}{x}\right| = C_3 \Rightarrow \ln\left|\frac{\ln(1+t)}{x}\right| = \ln e^{C_3} \Rightarrow$$

$\frac{\ln(1+t)}{x} = C$ или $\frac{\ln(1+\frac{y}{x})}{x} = C$ – общий интеграл.

в) $xy'+y=\ln x$.

Решение:

Преобразуем уравнение:

$xy'+y=\ln x \mid :x$:

$y'+\frac{y}{x}=\frac{\ln x}{x}$.

Получим линейное диф. уравнение. Решаем его методом Бернулли: пусть $y=u\cdot v$, где $u=u(x)$ и $v=v(x)$. Тогда $y'=u'v+uv'$. Получаем:

$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{\ln x}{x}$,

$u'v+u\cdot(v'+\frac{v}{x})=\frac{\ln x}{x}$.

Подберём значение $v=v(x)$ так, чтобы $v'+\frac{v}{x}=0$. Тогда $u'v=\frac{\ln x}{x}$.

Находим частное решение уравнения $v'+\frac{v}{x}=0$:

$\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v|=-\ln|x|+C_1$.

Если $C_1=0$, то $\ln|v|=\ln|\frac{1}{x}|$ и $v=\frac{1}{x}$.

Полученное значение подставим в уравнение $u'v=\frac{\ln x}{x}$: $u'\cdot\frac{1}{x}=\frac{\ln x}{x}$ или $u'=\ln x \Rightarrow u=\int \ln x\,dx$. Используем интегрирование по частям по формуле: $\int p\cdot dq=pq-\int q\cdot dp$. Пусть $p=\ln x$ и $dq=dx$, тогда $dp=\frac{dx}{x}$ и $q=x$. Получаем:

$\int \ln x\,dx=\ln x\cdot x-\int x\cdot\frac{dx}{x}=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C_2$, т.е. $u=x\ln x-x+C_2$. Общее решение исходного уравнения находим в виде $y=u\cdot v$, т.е. $y=(x\ln x-x+C_2)\cdot\frac{1}{x}$ или

$y=\ln x-1+\frac{C_2}{x}$.

г) $y''-3y'-2y=5x$.

Решение:

Решаем линейное неоднородное диф. уравнение II порядка с постоянными коэффициентами $y''+py'+qy=f(x)$, его общее решение ищем в виде $y=\tilde{y}+y^*$, где $\tilde{y}$ - общее решение соответствующего однородного уравнения $y''+py'+qy=0$; y^* - одно из частных решений исходного уравнения.

Для решения уравнения $y''+py'+qy=0$ запишем и решим его характеристическое уравнение $k^2+pk+q=0$. Если:

а) $k_1 \neq k_2 \in R$, то $\tilde{y}=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$.

б) $k_1=k_2=k\in R$, то $\tilde{y}=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}$.

в) $k_{1,2}=a\pm bi$ - комплексные корни, где

$a=-\frac{p}{2}$ и $b=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$, то $\tilde{y}=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx)$

Решаем характеристическое уравнение $k^2-3k-2=0$; $D=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=17$.

$k_1=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$; $k_2=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$. Т.к. $k_1\neq k_2$, то

$\tilde{y}=C_1e^{\frac{3-\sqrt{17}}{2}\cdot x}+C_2e^{\frac{3+\sqrt{17}}{2}\cdot x}$.

Правая часть исходного уравнения имеет специальный вид

$f(x)=P_n(x)\cdot e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ - многочлен n-ой степени, т.е. $P_n(x)=5x$; $\alpha=0$. Значит, y^* ищем в виде: $y^*=Q_n(x)e^{\alpha x}$, где $Q_n(x)$ - многочлен той же степени, взятый с неопределёнными коэффициентами: $Q_n(x)=Ax+B$, т.е. $y^*=Ax+B$.

Для нахождения A и B подставим значения y^*, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$:

Имеем: $y^* = Ax+B;$

$y^{*'} = A,$

$y^{*''} = 0,$ т. е.

$0 - 3A - 2(Ax+B) = 5x;$

$-3A - 2Ax - 2B = 5x,$

$(-3A - 2B) - 2Ax = 5x,$ отсюда

$\begin{cases} -2A = 5, \\ -3A - 2B = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{5}{2}; \\ -3\cdot(-\frac{5}{2}) - 2B = 0; \end{cases}$ т. е.

$2B = \frac{15}{2}$ и $B = \frac{15}{4}.$

Значит: $y^* = -\frac{5}{2}x + \frac{15}{4}.$

Общее решение исходного уравнения $y = \tilde{y} + y^*$ имеет вид:

$$y = C_1 e^{\frac{3-\sqrt{17}}{2}x} + C_2 e^{\frac{3+\sqrt{17}}{2}x} - \frac{5}{2}x + \frac{15}{4}.$$

9) $8y''+3y'+y=x\sin 4x$.

Решение (см. пример 2):

$8y''+3y'+y=0$;

$y''+\frac{3}{8}y'+\frac{1}{8}y=0$.

Характеристическое уравнение:

$k^2+\frac{3}{8}k+\frac{1}{8}=0$; $D=\left(\frac{3}{8}\right)^2-4\cdot1\cdot\frac{1}{8}=\frac{9}{64}-\frac{4}{8}=$

$=\frac{9}{64}-\frac{32}{64}=-\frac{23}{64}$, значит корни k_1 и k_2 – комплексные $k_{1,2}=a\pm bi$, где

$a=-\frac{p}{2}=-\frac{3/8}{2}=-\frac{3}{16}$;

$b=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}=\sqrt{\frac{1}{8}-\frac{(-3/16)^2}{4}}=\sqrt{\frac{1}{8}-\frac{9}{1024}}=\sqrt{\frac{256}{1024}-\frac{9}{1024}}=$

$=\sqrt{\frac{247}{1024}}=\frac{\sqrt{247}}{32}$.

Значит $\tilde{y}$ ищем в виде $\tilde{y}=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx)$,

т.е. $\tilde{y}=e^{-\frac{3}{16}x}\cdot\left(C_1\cos\frac{\sqrt{247}}{32}+C_2\sin\frac{\sqrt{247}}{32}\right)$.

Правая часть исходного уравнения имеет вид $f(x)=e^{\alpha x}\cdot(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x)$, где $\alpha=0$, $\beta=4$, $P_n(x)=0$ и $Q_m(x)=x$. Значит, y^* имеет вид $y^*=x^r\cdot e^{\alpha x}(M_\ell(x)\cos\beta x+N_\ell(x)\sin\beta x)$, где r показывает, сколько раз $\alpha+\beta i$ является корнем характеристического уравнения ($r=0$); $M_\ell(x)$ и $N_\ell(x)$ – многочлены степени $\ell=\max(m;n)=1$, взятые с неопределенными коэффициентами, т.е. $M_\ell(x)=Ax+B$; $N_\ell(x)=Cx+D$. Коэффициенты A, B, C и D находим подстановкой y^*, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в исходное уравнение:

Имеем: $y^* = (Ax+B)\cos 4x + (Cx+D)\sin 4x;$

$y^{*\prime} = A\cos 4x - 4(Ax+B)\sin 4x + C\sin 4x + 4(Cx+D)\cos 4x =$

$= (4Cx+4D+A)\cos 4x + (C-4Ax-4B)\sin 4x;$

$y^{*\prime\prime} = 4C\cos 4x - 4(4Cx+4D+A)\sin 4x - 4A\sin 4x +$

$+ 4(C-4Ax-4B)\cos 4x =$

$= (4C+4C-16Ax-16B)\cos 4x + (-16Cx-16D-4A-4A)\sin 4x =$

$= (8C-16Ax-16B)\cos 4x + (-16Cx-16D-8A)\sin 4x.$

Выполним подстановку:

$8\cdot((8C-16Ax-16B)\cos 4x + (-16Cx-16D-8A)\sin 4x) +$

$+ 3\cdot((4Cx+4D+A)\cos 4x + (C-4Ax-4B)\sin 4x) +$

$+ (Ax+B)\cos 4x + (Cx+D)\sin 4x = x\sin 4x;$

$(64C-128Ax-128B)\cos 4x + (-128Cx-128D-64A)\sin 4x +$

$+ (12Cx+12D+3A)\cos 4x + (3C-12Ax-12B)\sin 4x +$

$+ (Ax+B)\cos 4x + (Cx+D)\sin 4x = x\sin 4x.$

Значит:

$$(64C - 128Ax - 128B + 12Cx + 12D + 3A + Ax + B)\cos 4x +$$
$$+(-128Cx - 128D - 64A + 3C - 12Ax - 12B + Cx + D)\sin 4x = x\sin x.$$

Отсюда:

$$\begin{cases} 64C - 127Ax - 127B + 12Cx + 12D + 3A = 0; \\ -127Cx - 127D - 64A + 3C - 12Ax - 12B = x; \end{cases}$$ или

$$\begin{cases} (12C - 127A)x + (64C - 127B + 12D + 3A) = 0; \\ (-127C - 12A)x + (127D - 64A + 3C - 12B) = x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12C - 127A = 0, \\ 64C - 127B + 12D + 3A = 0, \\ -127C - 12A = 1, \\ 127D - 64A + 3C - 12B = 0. \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 127A - 12C = 0, \\ 12A + 127C = -1, \\ 3A - 127B + 64C + 12D = 0, \\ -64A - 12B + 3C + 127D = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получаем:

$$A = \frac{191820}{260123905};$$

$$B = \frac{1041472}{260123905};$$

$$C = \frac{2030095}{260123905};$$

$$D = \frac{147117}{260123905}.$$

Следовательно

$$y^* = \left(\frac{191820}{260123905}x + \frac{1041472}{260123905}\right)\cos 4x +$$

$$+\left(\frac{2030095}{260123905}x + \frac{147117}{260123905}\right)\sin 4x.$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид: $y = \tilde{y} + y^*$, т.е.

$$y = e^{-\frac{3}{16}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{247}}{32}x + C_2\sin\frac{\sqrt{247}}{32}x\right) + \left(\frac{191820}{260123905}x + \frac{1041472}{260123905}\right)\cos 4x +$$

$$+\left(\frac{2030095}{260123905}x + \frac{147117}{260123905}\right)\sin 4x$$